УДК 517.958

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СХЕМА РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ИЗ ТЕОРИИ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

THE COMPUTATIONAL SCHEME FOR SOLUTION OF SOME PROBLEMS FROM THE THEORY OF STRENGTH OF MATERIALS

Н.А. Чеканов [1], И.Н. Беляева [1], Н.Н. Чеканова [2]
N.A. Chekanov [1], I.N. Belyaeva [1], N.N. Chekanova [2]

*[1] Белгородский национальный исследовательский университет,
Россия, 308015, г.Белгород, ул. Победы, 85*

*Belgorod National Research University,
85 Pobedy St, Belgorod, 308015, Russia*

*[2] Харьковский институт банковского дела Университета банковского дела НБУ,
Украина, 61174, г. Харьков, прт. Победы, 55*

*Kharkov Institute of Banking of National University of Banking,
55 av. Pobedy, Kharkov, 61174, Ukraine*

E-mail: chekanov@bsu.edu.ru;ibelyaeva@bsu.edu.ru; chekanova76@list.ru

Аннотация. Разработан алгоритм и составлена программа в среде MAPLE для решения обыкновенных дифференциальных уравнений IV порядка, в общем, в виде обобщенных степенных рядов. Дифференциальные уравнения могут содержать регулярные особые точки. Приведены примеры решений дифференциальных уравнений IV порядка из теории сопротивления материалов, которые показывают эффективность разработанной программы.

Resume. The developed algorithm and program in MAPLE of the solution ordinary differential equations IV order , in general, in the form of generalized power series are developed. The differential equation could consist the singular regular points. Some examples of the solution differential equations IV order in theory of resistance of materials are presented, that show the efficiency of the developed program.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения IV порядка, алгоритм, математическое моделирование, обобщенно степенные ряды, регулярные особые точки

Key words: differential equations IV order, algorithm, mathematic modeling, generalized power series, singular regular points

Введение

Эффективным методом интегрирования дифференциальных уравнений является поиск решений в виде степенных рядов и последующим нахождением коэффициентов этих рядов [1]. Но на практике при конкретных расчетах приходится сталкиваться с большим объемом вычислений при нахождении неизвестных коэффициентов степенных рядов, причем сложность нахождения решений увеличивается в тех точках, в которых имеются особенности. Однако использование современных компьютеров вместе с пакетами программ для аналитических вычислений, таких как Maple, Mathematica, Reduce и другие, позволяют достаточно быстро выполнить необходимые расчеты по построению решений линейных дифференциальных уравнений в виде рядов, причем до очень больших порядков.

В задачах математической физики наиболее часто возникают линейные дифференциальные уравнения второго и четвертого порядков. Следует также отметить, что решения некоторых нелинейных дифференциальных уравнений могут быть выражены через линейно независимые решения соответствующих линейных дифференциальных уравнений. Например, решение нелинейного уравнения Ермакова-Милна-Пинни строится из двух независимых решений линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.

В работе представлена вычислительная схема решения обыкновенных линейных дифференциальных уравнений четвертого порядка в виде обобщенных степенных рядов с использованием системы компьютерной алгебры Maple. Также с помощью составленной программы были найдены линейно-независимые решения для ряда конкретных дифференциальных уравнений.

Вычислительная схема

Рассмотрим дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$y^{(IV)}(x)+P_3(x)\,y'''(x)+P_2(x)\,y''(x)+P_1(x)\,y'(x)+P_0(x)\,y(x)=0\,. \qquad (1)$$

В случае, если коэффициенты-функции $P_3(x)$, $P_2(x)$, $P_1(x)$, $P_0(x)$ не содержат регулярных особых точек и являются голоморфными функциями в окрестности точки $x=x_0$

$$P_3(x)=\sum_{k=0}^{\infty}p_k^{(3)}(x-x_0)^k\,,\ P_2(x)=\sum_{k=0}^{\infty}p_k^{(2)}(x-x_0)^k\,,$$

$$P_1(x)=\sum_{k=0}^{\infty}p_k^{(1)}(x-x_0)^k\,,\ P_0(x)=\sum_{k=0}^{\infty}p_k^{(0)}(x-x_0)^k\,, \qquad (2)$$

то линейно независимые решения y_1, y_2, y_3 и y_4 могут быть представленными виде степенных рядов:

$$y_1(x)=1+\sum_{k=2}^{\infty}c_k^{(1)}(x-x_0)^k\,, \qquad (3а)$$

$$y_2(x)=x-x_0+\sum_{k=2}^{\infty}c_k^{(2)}(x-x_0)^k\,, \qquad (3б)$$

$$y_3(x)=(x-x_0)^2/2+\sum_{k=2}^{\infty}c_k^{(3)}(x-x_0)^k\,, \qquad (3в)$$

$$y_4(x)=(x-x_0)^3/3+\sum_{k=2}^{\infty}c_k^{(4)}(x-x_0)^k\,, \qquad (3г)$$

Коэффициенты $c_k^{(1)}$, $c_k^{(2)}$, $c_k^{(3)}$, $c_k^{(4)}$ определяются единственным образом посредством подстановки рядов (3) в уравнение (1) и приравниванием к нулю коэффициентов при различных степенях независимой переменной в левой части полученного равенства.

При наличии полюсов не выше четвертого порядка в точке $x=x_0$ вид решений (3) будет иным в зависимости от корней определяющего уравнения (см., например, [1-4]). Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений [2] известно, что для того чтобы уравнение, в частности, вида (1) имело в окрестности особой точки $x=x_0$ хотя бы одно частное решение в виде обобщенного степенного ряда

$$y(x)=(x-x_0)^{\rho}\sum_{k=0}^{\infty}c_k(x-x_0)^k, \quad (c_0\neq 0), \tag{4}$$

где показатель ρ есть некоторое постоянное число, достаточно, чтобы это уравнение имело вид

$$y^{(IV)}(x)+\frac{\sum_{k=0}^{\infty}p_k^{(3)}}{x-x_0}y'''(x)+\frac{\sum_{k=0}^{\infty}p_k^{(2)}}{(x-x_0)^2}y''(x)+\frac{\sum_{k=0}^{\infty}p_k^{(1)}}{(x-x_0)^3}y'(x)+\frac{\sum_{k=0}^{\infty}p_k^{(0)}}{(x-x_0)^4}y(x)=0. \tag{5}$$

Показатель ρ находится из определяющего уравнения:

$$\rho(\rho-1)(\rho-2)(\rho-3)+\rho(\rho-1)(\rho-2)\,p_0^3+\rho(\rho-1)\,p_0^2+\rho\,p_0^1+p_0^0=0. \tag{6}$$

Пусть ρ_1, ρ_2, ρ_3 и ρ_4 есть корни уравнения (6). Тогда, если корни определяющего уравнения ρ_1, ρ_2, ρ_3 и ρ_4 независимы, и никакие два из них не различаются на целое число, то каждому числу ρ соответствует определенная последовательность коэффициентов c_k, а всего получается четыре независимых решения, образующих фундаментальную систему

$$y_1(x)=(x-x_0)^{\rho_1}\sum_{k=0}^{\infty}c_k^{(1)}(x-x_0)^k, \quad (c_0^{(1)}\neq 0), \tag{7а}$$

$$y_2(x)=(x-x_0)^{\rho_2}\sum_{k=0}^{\infty}c_k^{(2)}(x-x_0)^k, \quad (c_0^{(2)}\neq 0), \tag{7б}$$

$$y_3(x)=(x-x_0)^{\rho_3}\sum_{k=0}^{\infty}c_k^{(3)}(x-x_0)^k, \quad (c_0^{(3)}\neq 0), \tag{7в}$$

$$y_4(x)=(x-x_0)^{\rho_4}\sum_{k=0}^{\infty}c_k^{(4)}(x-x_0)^k, \quad (c_0^{(4)}\neq 0). \tag{7г}$$

Коэффициенты c_k^1, c_k^2, c_k^3 и c_k^4 определяются подстановкой рядов (7) в уравнение (5), при этом коэффициенты c_0^1, c_0^2, c_0^3 и c_0^4 остаются произвольными (далее положим их равными единице).

Если найденные четыре значения ρ таковы, что два или несколько различаются на целое число, то они могут быть расположены в виде независимых последовательностей

$$\begin{gathered}\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_{\alpha-1},\\ \rho_\alpha,\rho_{\alpha+1},\ldots,\rho_{\beta-1},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{gathered} \tag{8}$$

так, чтобы величины в каждой последовательности различались только на целые числа, и их вещественные части образовали бы невозрастающую последовательность. Только первый член каждой последовательности дает решение вида (4), поскольку, например, любой член $\rho_{\alpha+k}$ последовательности $\rho_\alpha\ldots\rho_{\beta-1}$ равен ρ_α или меньше его на положительное целое число.

Рассмотрим одну из последовательностей показателей дифференциального уравнения, например, последовательность

$$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{\alpha-1},$$

которая так расположена, что если $\chi < \lambda$, то $\rho_\chi - \rho_\lambda$ положительное целое число или нуль. Поскольку эти показатели не обязательно равны, они могут быть разделены на подпоследовательности так, чтобы члены каждой подпоследовательности были равны между собой. Так, предположим, что $\rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_{i-1}$ соответствуют корню кратности i; $\rho_i = \rho_{i+1} = \ldots = \rho_{j-1}$ соответствуют корню кратности $j-i$; $\rho_j = \rho_{j+1} = \ldots = \rho_{k-1}$ соответствуют корню кратности $k-j$ и т.д. до тех пор пока ряд не будет исчерпан.

Рассмотрим показатель ρ_1 в первой подпоследовательности. В данном случае возникает подпоследовательность i решений

$$y_1(x) = w_1(x, \rho_1),$$

$$y_2(x) = w_1(x, \rho_1)\ln x + w_2(x, \rho_1)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_{i-1}(x) = w_1(x, \rho_1)(\ln x)^{i-1} + (i-1)w_2(x, \rho_1)(\ln x)^{i-2} + \ldots + w_{i-1}(x, \rho_1), \tag{9}$$

где $w_s(x, \rho_s) = (x - x_0)^{\rho_s} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^s (x - x_0)^k, (c_0^s \neq 0, s = 1,2,3,\ldots)$. Наличие $w_1(x, \rho_1)(\ln x)^{r-1}$ в W_r показывает, что эти i решений линейно-независимы.

Рассмотрим показатель ρ_i второй подпоследовательности, ему соответствуют $j-i$ решений

$$y_i(x) = w_1(x, \rho_i)(\ln x)^i + i\, w_2(x, \rho_i)(\ln x)^{i-1} + \ldots + w_i(x, \rho_i)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_{j-1}(x) = w_1(x, \rho_i)(\ln x)^{j-1} + (j-1)w_2(x, \rho_i)(\ln x)^{j-2} + \ldots + w_{j-1}(x, \rho_i). \tag{10}$$

Аналогично подпоследовательность индекса j дает $k-j$ решений и т.д. до тех пор пока ряд не будет исчерпан.

Так как функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ и $y_4(x)$ являются линейно независимыми решениями уравнения (5), то с их помощью находим общее решение

$$y(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x) + C_3 \cdot y_3(x) + C_4 \cdot y_4(x). \tag{11}$$

Разработанная программа [5] позволяет находить решения дифференциальных уравнений четвертого порядка в виде степенных рядов, в общем, произвольной степени n, но ограниченной возможностями конкретной вычислительной машины.

Решение задач из теории сопротивления материалов

При помощи разработанной программы найдены решения двух задач из теории сопротивления материалов.

Пример 1. Основным уравнением устойчивости плоской формы изгиба двутавровой балки, к которой приложен изгибающий момент и внешняя сила, является линейное дифференциальное уравнение четвертого порядка [6]

$$\theta^{(IV)}(x)-\frac{1}{a^2}\theta''(x)-\frac{1}{d^4}\theta(x)=0,$$

где a, d - геометрические и прочностные характеристики балки, $\theta(x)$ - узел закручивания балки вдоль ее длины. В данном уравнении коэффициенты-функции равны $P_3(x)=0$, $P_2(x)=-\frac{1}{a^2}$, $P_1(x)=0$, $P_0(x)=-\frac{1}{d^4}$, не имеют особых точек.

С помощью разработанной программы [5] получаем четыре линейно независимых решения первые члены которых приведены ниже

$$\theta_1(x)=1+\frac{1}{24d^4}x^4+\frac{1}{720a^2d^4}x^6+\frac{(d^4+a^4)}{40320a^4d^8}x^8+\frac{(d^4+2a^4)}{3628800a^6d^8}x^{10}+\frac{(d^8+3a^4d^4+a^8)}{479001600a^8d^{12}}x^{12}+$$
$$+\frac{(d^8+4a^4d^4+3a^8)}{87178291200a^{10}d^{12}}x^{14}+\frac{(d^{12}+5a^4d^8+6d^4a^8+a^{12})}{20922789888000a^{12}d^{16}}x^{16},$$

$$\theta_2(x)=x+\frac{1}{120d^4}x^5+\frac{1}{5040a^2d^4}x^7+\frac{(d^4+a^4)}{362880a^4d^8}x^9+\frac{(d^4+2a^4)}{39916800a^6d^8}x^{11}+$$
$$+\frac{(d^8+3a^4d^4+a^8)}{6227020800a^8d^{12}}x^{13}+\frac{(d^8+4a^4d^4+3a^8)}{1307674368000a^{10}d^{12}}x^{15},$$

$$\theta_3(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{24a^2}x^4+\frac{(d^4+a^4)}{720a^4d^4}x^6+\frac{(d^4+2a^4)}{40320a^6d^4}x^8+\frac{(d^8+3a^4d^4+a^8)}{3628800a^8d^8}x^{10}+\frac{(d^8+4a^4d^4+3a^8)}{479001600a^{10}d^8}x^{12}+$$
$$+\frac{(d^{12}+5a^4d^8+6d^4a^8+a^{12})}{87178291200a^{12}d^{12}}x^{14}+\frac{(d^{12}+6a^4d^8+10d^4a^8+4a^{12})}{20922789888000a^{14}d^{12}}x^{16},$$

$$\theta_4(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{60a^2}x^5+\frac{(d^4+a^4)}{2520a^4d^4}x^7+\frac{(d^4+2a^4)}{181440a^6d^4}x^9+\frac{(d^8+3a^4d^4+a^8)}{19958400a^8d^8}x^{11}+$$
$$+\frac{(d^8+4a^4d^4+3a^8)}{3113510400a^{10}d^8}x^{13}+\frac{(d^{12}+5a^4d^8+6d^4a^8+a^{12})}{653837184000a^{12}d^{12}}x^{15}.$$

Пример 2. Уравнение

$$y^{(IV)}(x)+\frac{2F}{\alpha}y'''(x)+\frac{M^2}{\alpha^2}y''(x)+\frac{F^2}{\alpha^2}y(x)=0$$

описывает вал, на который действует крутящий момент M и сила сжатия F, приложенная вдоль оси вала, вал имеет постоянное поперечное сечение и α - жесткость вала на изгиб [7].

Данное уравнение не имеет особых точек. С помощью разработанной программы [5] получены четыре линейно независимых решения первые члены которых приведены ниже

$$y_1(x)=1-\frac{F^2}{24\alpha^2}x^4+\frac{F^3}{60\alpha^3}x^5-\frac{F^2(4F^2-M^2)}{720\alpha^4}x^6+\frac{F^3(2F^2-M^2)}{1260\alpha^5}x^7-$$
$$-\frac{F^2(16F^4-12M^2F^2+M^4-F^2\alpha^2)}{40320\alpha^6}x^8+\frac{F^3(16F^4-16M^2F^2+3M^4-2F^2\alpha^2)}{181440\alpha^7}x^9,$$

$$y_2(x)=x-\frac{F^2}{120\alpha^2}x^5+\frac{F^3}{360\alpha^3}x^6-\frac{F^2(4F^2-M^2)}{5040\alpha^4}x^7+\frac{F^3(2F^2-M^2)}{10080\alpha^5}x^8-$$
$$-\frac{F^2(16F^4-12M^2F^2+M^4-F^2\alpha^2)}{362880\alpha^6}x^9+\frac{F^3(16F^4-16M^2F^2+3M^4-2F^2\alpha^2)}{1814400\alpha^7}x^{10},$$

$$y_3(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{M^2}{24\alpha^2}x^4+\frac{FM^2}{60\alpha^3}x^5-\frac{(4M^2F^2-M^4+F^2\alpha^2)}{720\alpha^4}x^6+\frac{F(4M^2F^2-2M^4+F^2\alpha^2)}{2520\alpha^5}x^7-$$
$$-\frac{(16F^4M^2-12M^4F^2+4F^4\alpha^2+M^6-2M^2F^2\alpha^2)}{40320\alpha^6}x^8+$$
$$+\frac{F(16F^4M^2-16M^4F^2+4F^4\alpha^2+3M^6-4M^2F^2\alpha^2)}{181440\alpha^7}x^9,$$

$$y_4(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{F}{6\alpha}x^4+\frac{(4F^2-M^2)}{60\alpha^2}x^5-\frac{F(2F^2-M^2)}{90\alpha^3}x^6+\frac{(16F^4-12M^2F^2+M^4-F^2\alpha^2)}{2520\alpha^4}x^7-$$
$$-\frac{F(16F^4-16M^2F^2+3M^4-2F^2\alpha^2)}{10080\alpha^5}x^8+$$
$$+\frac{(64F^6-80F^4M^2+24M^4F^2-12F^4\alpha^2-M^6+2M^2F^2\alpha^2)}{181440\alpha^6}x^9.$$

Заключение

В данной работе представлена вычислительная схема решения обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка в виде обобщенно степенных рядов. На основе разработанного алгоритма составлена программа в Maple и решены две задачи из теории сопротивления материалов. В дальнейшем планируется построение функции Грина для дифференциальных уравнений IV порядка.

Список литературы

1. Матвеев Н.М. 1963. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа: 546.

Matveev N.M. 1963. Methods integrating of ordinary differential equations. M., Vysschhaya schkola: 546.

2. Трикоми Ф. 1962. Дифференциальные уравнения. М. Издательство иностранной литературы: 351.

Tricomi F. 1961. Differential equations. Turin: Blackie & son limited : 348.

3. Сансоне Дж. 1953. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т.1, М.: Изд-во иностранной литературы : 346.

Sansone J. 1948. Ordinary differential equations. V.1 : 346.

4. Айнс Э. Л. 1939. Обыкновенные дифференциальные уравнения, ОНТИ: Государственное научно-техническое издательство Украины : 719.

Ince E.L. 1939. Differential equations. London: University Press: 700.

5. Беляева И.Н., Чеканов Н.А., Чеканова Н.А. 2016. Программа символьно-численного интегрирования линейного дифференциального уравнения четвертого порядка в виде обобщенных рядов. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2016611952.

Belyaeva I.N., Chekanov N.A., Chekanova N.N. 2016. Program of symbol-numeric integration of linear differential equation of four order. Patent of RU, Program for ECM, №2016611952.

6. Феппль А., Феппль Л. 1936. Сила и деформация. Прикладная теория упругости, том 2, М-Л.: НКТЛ: 409 с.

Föppl A., Föppl L. 1928. Drang und Zwang, v.II., München - Berlin: Verlag von R. Oldenbourg: 385.

7. Коллатц Л. 1968. Задачи на собственные значения с техническими приложениями, М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. Литературы: 504.

Collatz L. 1963. Eigenwertaufgaben mit technischen anwendungen, Leipzig: Akademishe verlagsgesellshaft, Geest & Portig K. : 495.